Marco Antonio Pio Mendes

Alianças em Grafos

Brasil

15 de dezembro de 2017

Marco Antonio Pio Mendes

Alianças em Grafos

Monografia apresentada ao curso de Ciência da Computação do Departamento de Informática, da Universidade Federal do Paraná, como requisito para obter o grau de Bacharel em Ciência da Computação. Orientador: Prof. Dr. André Luiz Pires Guedes.

Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Informática

Bacharelado em Ciência da Computação

Brasil

15 de dezembro de 2017

Agradecimentos

O agradecimento principal é direcionado a Leila Terezinha Pio, minha mãe, que além de me conceder a vida e uma base sólida de valores, sempre confiou em mim e proporcionou condições mais do que suficientes para minha formação acadêmica e moral.

Os agradecimentos especiais são aos meus amigos, familiares e namorada, pela paciência e auxílio no decorrer de todo o processo da graduação. E ao meu orientador pela oportunidade e apoio.

Agradeço também a todos os responsáveis pelo curso de Bacharelado em Ciência da Computação da UFPR, por sua dedicação para com os alunos.

Resumo

Uma aliança é um grupo com alguma propriedade coletiva, ou seja, um conjunto de elementos que se unem em prol de um objetivo em comum. Alianças podem ocorrer entre pessoas, empresas, sociedades, partidos e países.

No mundo real há diversos tipos diferentes de alianças e a capacidade de descobrir automaticamente estruturas nesse formato é desejável para muitas aplicações nas áreas de economia, segurança, redes de computadores, redes sociais, ciências biológicas e matemática.

Uma modelagem de criação de *alianças em grafos* foi apresentada em 2002, por Petter Kristiansen, Sandra M. Hedetniemi e Stephen T. Hedetniemi, no artigo *Introduction to alliances in graphs* (KRISTIANSEN; HEDETNIEMI; HEDETNIEMI, 2002). Nesse artigo, os autores definiram que os vértices de um grafo podem representar os elementos de uma aliança e as arestas do grafo as relações entre tais elementos. Além disso, apresentaram alguns tipos de alianças e resultados de complexidade computacional sobre elas.

As alianças em grafos mais estudadas são as do tipo defensivas, ofensivas e poderosas (ou duais). Uma aliança defensiva é um conjunto de vértices, onde cada um dos vértices contém pelo menos tantos vizinhos na aliança, incluindo ele próprio, quanto vizinhos fora da aliança. Uma aliança ofensiva é um conjunto de vértices em que, cada vértice em sua fronteira tenha (pelo menos) tantos vizinhos dentro quanto fora da aliança, incluindo ele próprio. E uma aliança poderosa é defensiva e ofensiva. Além dessas, existe uma generalização de alianças chamada k-alianças (ou $r-$alianças).

Neste trabalho, apresentamos alguns tipos de alianças em grafos, com propriedades matemáticas, detalhes de alguns cálculos e resultados de complexidade computacional sobre essas alianças.

Palavras-chaves: Algoritmos, Grafos, Alianças, Alianças Defensivas, Alianças Ofensivas, Alianças Poderosas, Complexidade Computacional.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de que $\partial(S)$ pode ser diferente de $V - S$ 10

Figura 2 – Exemplos de Alianças Defensivas 12
Figura 3 – Exemplo de Aliança Defensiva Global 13
Figura 4 – Exemplos de Alianças Ofensivas 16

Figura 5 – Classes de complexidade computacional 23

Lista de tabelas

Tabela 1 – Números de k-Alianças Defensivas 15

Tabela 2 – Classes de complexidade das Alianças 26

Sumário

1 Introdução 7

2 Conceitos Preliminares 10

2.1 Definições e Notações 10

3 Alianças em Grafos 12

3.1 Alianças Defensivas 12

3.1.1 Alianças Defensivas em algumas classes de grafos 14

3.2 Alianças Ofensivas 16

3.2.1 Alianças Ofensivas em algumas classes de grafos 18

3.3 Alianças Poderosas 20

3.4 Alianças Ponderadas 21

4 Complexidade Computacional 22

4.1 Complexidade de Alianças 23

Conclusão 27

Referências 28

1 Introdução

Um conjunto de elementos quaisquer pode exibir o fenômeno de formação de subconjuntos com alguma propriedade coletiva. Tais subconjuntos chamamos de *alianças*, que de forma bem simples, são grupos de elementos que compartilham a ideia de que a união é mais forte que o indivíduo. Assim, as alianças podem ocorrer entre pessoas, empresas, sociedades, partidos e países.

No mundo real há diversos tipos diferentes de alianças e a capacidade de descobrir automaticamente estruturas nesse formato é desejável para muitas aplicações. Com isso, surgiu a representação de *alianças em grafos*.

Grafos são objetos combinatórios que possuem ampla aplicação na modelagem de problemas da vida real, principalmente nas áreas da computação e da matemática. Daí, a linha de pesquisa em algoritmos e grafos visa desenvolver algoritmos eficientes para resolução de problemas e fazer a análise teórica e aplicacional de tais algoritmos. Problemas de distribuição, tráfego, armazenamento, organização de processos e segurança são alguns exemplos de problemas que podem ser modelados e resolvidos com o auxílio dos grafos.

Existem duas maneiras de pensar sobre alianças em grafos: a criação de alianças ou a destruição de alianças existentes. A primeira menção de alianças em grafos foi no ano de 1979, no artigo *"Cohesion in alliance graphs"* (LIPMAN; RINGEISEN, 1979), e consiste em encontrar os nós críticos de uma aliança. Este é um dos poucos artigos sobre a destruição de alianças existentes, até a presente data.

E há a modelagem de criação de alianças em grafos, apresentada em 2002, por Petter Kristiansen, Sandra M. Hedetniemi e Stephen T. Hedetniemi, no artigo *Introduction to alliances in graphs* (KRISTIANSEN; HEDETNIEMI; HEDETNIEMI, 2002). Nesse artigo, os autores definiram que os vértices de um grafo podem representar os elementos de uma aliança e as arestas do grafo as relações entre tais elementos. Além disso, apresentaram alguns tipos de alianças e resultados de complexidade computacional sobre elas.

As alianças em grafos mais estudadas são as do tipo defensivas, ofensivas e poderosas (ou duais). Uma aliança defensiva é um conjunto de vértices, onde cada um dos vértices contém pelo menos tantos vizinhos na aliança, incluindo ele próprio, quanto vizinhos fora da aliança. Uma aliança ofensiva é um conjunto de vértices em que, cada vértice em sua fronteira tenha (pelo menos) tantos vizinhos dentro quanto fora da aliança, incluindo ele próprio. E uma aliança poderosa é defensiva e ofensiva. Além dessas, existe uma generalização de alianças chamada k-alianças (ou $r-$alianças).

Estudos sobre alianças em grafos receberam maior atenção no decorrer dos últimos 15 anos, devido à grande quantidade de aplicações de tais estruturas, como por exemplo:

- Na defesa nacional (KRISTIANSEN; HEDETNIEMI; HEDETNIEMI, 2004). Em tempos de guerra, diferentes nações podem unir seus exércitos para que tenham menos inimigos e maior força de ataque. Assim podem formar alianças de natureza defensiva e ofensiva.

- Em cadeias alimentares (SZABÓ; CZÁRÁN, 2001), podemos observar a formação de alianças defensivas entre espécies que interagem entre si de forma cíclica, semelhante ao jogo do Pedra-Papel-Tesoura.

- Em comunidades na web, adotando a definição proposta por Flake, Lawrence e Giles (FLAKE; LAWRENCE; GILES, 2000), "uma comunidade na web é um conjunto de sites que tem mais links (em qualquer direção) para os membros da comunidade do que para os não-membros". E também para a detecção de pesquisas semelhantes publicadas na web (PERIANES-RODRÍGUEZ; OLMEDA-GÓMEZ; MOYA-ANEGÓN, 2010).

- Na área de bioinformática, Haynes (HAYNES et al., 2006) apresenta uma modelagem de biomoléculas em forma de grafos (árvores). Com isso, utilizam parâmetros de dominância em grafos, incluindo o número global de aliança defensiva, para identificar se as biomoléculas são estruturas do tipo RNA. Assim, é apresentada uma ferramenta interessante para previsões genômicas e proteômicas.

- Um sistema distribuído pode ser representado como um grafo, onde os vértices representam os processos e as arestas as comunicações entre eles. Com isso, o sistema pode ser particionado em duas alianças, por meio de funções de votos da maioria (FLOCCHINI et al., 2004). Daí, caso existam elementos (processos) suspeitos nesse sistema, por meio de algoritmos de consenso (PELEG, 2002), decide-se quais elementos (processos) serão erradicados ou mantidos no sistema.

- Nas redes tolerantes a falha, existem algoritmos de auto-estabilização tolerantes a falhas, apresentados por Srimani (SRIMANI; XU, 2007), Xu (XU; SRIMANI, 2006), Carrier (CARRIER et al., 2013) e Yahiaoui (YAHIAOUI et al., 2013). Esses algoritmos particionam os processadores em alianças, quando há um conflito de distribuição de dados.

- Particionamento de objetos em subconjuntos com características semelhantes é um processo amplamente utilizado em áreas como: mineração de dados, clusterização de dados, balanceamento de carga, segmentação de imagens, programação paralela e divisão de tarefas. Uma maneira de gerar as partições é modelar o problema para um

grafo, onde os vértices são os elementos e as arestas as possíveis ligações entre eles. Por exemplo, a partição de um grafo no menor número de conjuntos independentes é usada para resolver o problema do número cromático. Assim, existem muitos estudos e resultados teóricos sobre partições de grafos em alianças, como os apresentados por Shafique (HASSAN-SHAFIQUE, 2004), que estudou o particionamento de dados em clusters utilizando o conceito de alianças defensivas.

Neste trabalho, apresentamos os tipos de alianças mais estudados, propriedades matemáticas e resultados de complexidade computacional sobre alianças em algumas classes de grafos.

A dissertação está organizada em quatro capítulos principais e mais dois capítulos com as conclusões e referências bibliográficas. No Capítulo 2, apresentaremos os conceitos preliminares necessários ao entendimento das alianças em grafos. No Capítulo 3, definiremos alguns tipos de alianças existentes, bem como seus números, mostraremos detalhes sobre alguns resultados e uma generalização de alianças. No Capítulo 4, apresentaremos a complexidade de alguns tipos de alianças em grafos. Em seguida mostraremos algumas conclusões sobre a pesquisa e os resultados obtidos. E finalizaremos com a apresentação das referências bibliográficas utilizadas.

2 Conceitos Preliminares

Neste capítulo são introduzidos alguns conceitos de Teoria dos Grafos, com a finalidade de estabelecer as definições e notações necessárias para o entendimento da tese. Quando preciso, novas definições e notações são feitas ao longo do trabalho.

2.1 Definições e Notações

A *cardinalidade* de um conjunto S é denotada como $|S|$ e representa a quantidade de elementos pertencentes ao conjunto S.

Podemos denotar um grafo simples como $G = (V, E)$, onde V (ou $V(G)$) é o conjunto de vértices e E (ou $E(G)$) é conjunto de arestas. Também dizemos que $G = (V, E)$ é de ordem $n = |V|$ e de tamanho $m = |E|$.

Denotamos vw como uma aresta em $E(G)$, quando v e w são vértices adjacentes em G.

A *vizinhança aberta* de um vértice $v \in V$ é o conjunto $N(v) = \{w \in V : vw \in E\}$. E os vizinhos de $v \in V$ que pertencem a $S \subseteq V$ é o conjunto $N_S(v) = \{w \in S : vw \in E\}$.

A *vizinhança fechada* de um vértice $v \in V$ é o conjunto $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

A *vizinhança aberta* de um conjunto $S \subseteq V$ é o conjunto $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$.

A *vizinhança fechada* de um conjunto $S \subseteq V$ é o conjunto $N[S] = N(S) \cup S$.

A *fronteira* de um conjunto $S \subseteq V$ é o conjunto $\partial(S) = N[S] - S$. Note que a fronteira de S não necessariamente é igual a $V - S$. Fato comprovado pela Figura 1, onde $S = \{2, 4\}$, $\partial(S) = \{1, 3\}$ e $V - S = \{1, 3, 5\}$.

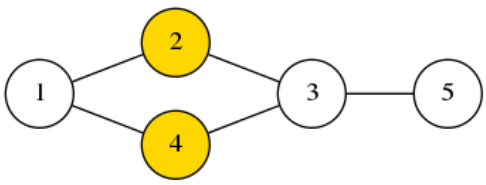

Figura 1: Exemplo de que $\partial(S)$ pode ser diferente de $V - S$

O *complemento* de um conjunto $S \subseteq V$ é denotado como o conjunto $\bar{S} = V - S$.

O *grau* de um vértice $v \in V$ é definido como $deg(v) = |N(v)|$. E a quantidade de vizinhos de $v \in V$ em $S \subseteq V$ é definida como $\deg_S(v) = |N_S(v)|$.

O *grau mínimo* dentre todos os vértices de G é denotado como $\delta(G)$.

O *grau máximo* dentre todos os vértices de G é denotado como $\Delta(G)$.

Um conjunto $S \subset V$ é um *conjunto dominante* se $N[S] = V$.

Um conjunto $S \subset V$ é um *conjunto dominante total* se $N(S) = V$.

O *número de dominação* de G, denotado por $\gamma(G)$, é a *cardinalidade mínima* dos conjuntos dominantes.

O *número de dominação total* de G, denotado por $\gamma_t(G)$, é a *cardinalidade mínima* dos conjuntos dominantes totais.

O conceito de *dominação* em grafos, com suas diversas variações, foi amplamente explorado na teoria dos grafos, principalmente em (HAYNES; HEDETNIEMI; SLATER, 1997) e (HAYNES; HEDETNIEMI; SLATER, 1998).

Uma *árvore* é um grafo de ordem n e tamanho m, onde cada vértice tem pelo menos um vizinho e $m = n - 1$. Chamamos de vértice *folha* todo vértice v que pertence à *árvore* e que tem grau um ($deg(v) = 1$).

Um grafo é chamado de *planar* se for possível desenhá-lo num plano sem que as arestas se cruzem.

Um grafo *completo* $K_n = (V, E)$ é um grafo simples com n vértices e com o máximo de arestas possíveis, ou seja, para todo vértice $v \in V$ temos que $deg(v) = n - 1$.

Um grafo é *bipartido* se os vértices podem ser particionados em dois conjuntos de vértices, R e S, de forma que toda aresta do grafo conecta um vértice de R a um vértice em S.

Um grafo é *bipartido completo* se for bipartido e possuir o máximo de arestas possível, ou seja, $|E| = |R| * |S|$. Assim, denotamos um grafo *bipartido completo* como $K_{r,s}$ onde $r = |R|$ e $s = |S|$.

3 Alianças em Grafos

Neste capítulo, são abordados alguns dos principais aspectos relacionados a alianças em grafos, visando entender a conceituação e alguns dos resultados teóricos. Para tanto, definiremos alguns tipos de alianças e exibiremos alguns valores previamente calculados.

3.1 Alianças Defensivas

De maneira informal, uma aliança defensiva é um conjunto de vértices, onde cada um dos vértices contém pelo menos tantos vizinhos na aliança, incluindo ele próprio, quanto vizinhos fora da aliança. Usando questões de segurança nacional para ilustrar esse conceito, pode-se pensar que um vértice na aliança defensiva é um vértice capaz de se defender e defender seus vizinhos aliados.

Definição 3.1 *Uma aliança defensiva é um conjunto não vazio de vértices* $S \subseteq V$ *quando,* $\forall v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap \bar{S}|$. *Implicando que para todo vértice* $v \in S$, v *tem no máximo um vizinho a mais em* $V - S$ *que em* S.

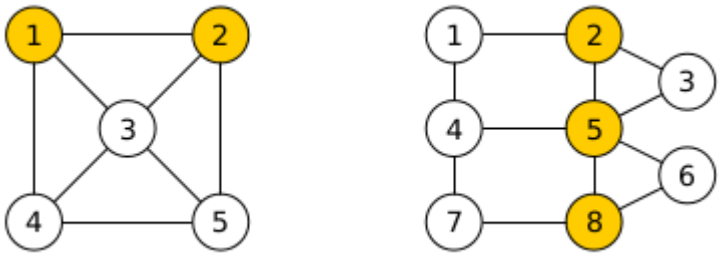

Figura 2: Exemplos de Alianças Defensivas

Nas Figuras 2 e 3 vemos que os vértices (amarelos) pertencentes à aliança defensiva S se apoiam mutualmente para se protegerem dos demais vértices. Assim, para um vértice qualquer de S, há pelo menos tantos defensores quanto agressores e qualquer ataque a um único vértice pode ser impedido.

Há várias maneiras de definir como um conjunto é atacado e defendido. Estamos considerando a maneira discutida por Brigham, Dutton e Hedetniemi (BRIGHAM; DUTTON; HEDETNIEMI, 2007). Assim, tendo um conjunto de vértices S, assumimos que um agressor $w \in \partial(S)$ pode atacar somente um único vértice de S em um determinado momento, mesmo que w seja vizinho de vários vértices de S. Além disso, um vértice defensor $v \in S$ pode impedir somente um agressor dos vértices de $\partial(S)$, de cada vez.

Definição 3.2 *Uma aliança defensiva S é chamada de forte quando, $\forall v \in S$, $|N[v] \cap S| > |N(v) \cap \bar{S}|$. Assim, a inequação é estrita e todo vértice em S é fortemente defendido.*

Definição 3.3 *Uma aliança defensiva (forte) S é chamada crítica se nenhum subconjunto próprio de S também é uma aliança defensiva (forte).*

Definição 3.4 *Uma aliança defensiva (forte) S é chamada global se também for um conjunto dominante.*

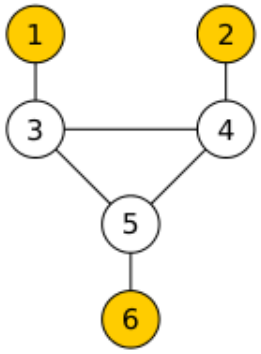

Figura 3: Exemplo de Aliança Defensiva Global

De acordo com Shafique (HASSAN-SHAFIQUE, 2004), podemos generalizar o conceito de alianças defensivas (fortes) para *k-alianças defensivas*. Com isso, podemos ver que as alianças defensivas (fortes) definidas por Kristiansen (KRISTIANSEN; HEDETNIEMI; HEDETNIEMI, 2004) em "Alliances in graphs", são equivalentes às (-1)-alianças defensivas e 0-alianças defensivas (SHAFIQUE; DUTTON, 2002).

Definição 3.5 *Uma k-aliança defensiva é um conjunto não vazio de vértices $S \subseteq V$ quando, $\forall v \in S$ e $k \in \{-\Delta(G), ..., \Delta(G)\}$, $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k$.*

- A equivalência entre (-1)-aliança defensiva e aliança defensiva vem a seguir:

  Seja $S \subseteq V$ uma aliança defensiva. Queremos que $\forall v \in S$ e $k = -1$,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow |N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap \bar{S}|$

  Como $N[v] \cap S = (N(v) \cup \{v\}) \cap S$ temos,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow |(N(v) \cup \{v\}) \cap S| \geq |N(v) \cap \bar{S}|$

  Como $v \in S$ temos,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow |N(v) \cap S| + |\{v\}| \geq |N(v) \cap \bar{S}|$

  Como $|N(v) \cap S| = |N_S(v)| = \deg_S(v)$ e $|N(v) \cap \bar{S}| = |N_{\bar{S}}(v)| = \deg_{\bar{S}}(v)$ temos,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow \deg_S(v) + 1 \geq \deg_{\bar{S}}(v)$

Como $k = -1$ temos,

$\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) - 1 \Leftrightarrow \deg_S(v) + 1 \geq \deg_{\bar{S}}(v)$

$\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) - 1 \Leftrightarrow \deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) - 1$

Concluímos que as equações são equivalentes.

Podemos ver que as alianças defensivas podem ser definidas usando os *graus* dos vértices e não somente as *vizinhanças* (OUAZINE; SLIMANI; TARI, 2017).

Definição 3.6 *Um conjunto S é aliança defensiva quando* $\forall v \in S \deg_S(v)+1 \geq \deg_{\bar{S}}(v)$.

Definição 3.7 *Um conjunto S é aliança defensiva forte quando* $\forall v \in S \deg_S(v) + 1 > \deg_{\bar{S}}(v)$.

- A equivalência entre 0-aliança defensiva e aliança defensiva forte vem a seguir:

  Seja $S \subseteq V$ uma aliança defensiva forte. Queremos que $\forall v \in S$ e $k = 0$,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow |N[v] \cap S| > |N(v) \cap \bar{S}|$

  Pela **Definição 3.7** temos,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow \deg_S(v) + 1 > \deg_{\bar{S}}(v)$

  Como $k = 0$ temos,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + 0 \Leftrightarrow \deg_S(v) + 1 > \deg_{\bar{S}}(v)$

  Como os graus dos vértices são números inteiros,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) \Leftrightarrow \deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v)$

  Concluímos que as equações são equivalentes.

3.1.1 Alianças Defensivas em algumas classes de grafos

Vários parâmetros foram definidos e estudados na literatura para alianças defensivas e k-alianças defensivas. Partindo dessa generalização de alianças defensivas em k-alianças defensivas, vamos mostrar a definição de alguns desses parâmetros e os valores obtidos em algumas classes de grafos.

Definição 3.8 *O número de k-aliança defensiva de um grafo G é igual à cardinalidade mínima dentre todas as críticas k-alianças defensivas em G e é denotado $a_k^d(G)$. Equivalentemente $a_{-1}^d(G)$ para alianças defensivas e $a_0^d(G)$ para alianças defensivas fortes.*

Definição 3.9 *O número da k-aliança defensiva superior de um grafo G é igual à cardinalidade máxima dentre todas as críticas k-alianças defensivas em G e é denotado $A_k^d(G)$.*

Equivalentemente $A^d_{-1}(G)$ para alianças defensivas e $A^d_0(G)$ para alianças defensivas fortes.

Definição 3.10 *O número de k-aliança defensiva global de um grafo G é igual à cardinalidade mínima dentre todas as críticas k-alianças defensivas globais em G e é denotado $\gamma^d_k(G)$. Equivalentemente $\gamma^d_{-1}(G)$ para alianças defensivas globais e $\gamma^d_0(G)$ para alianças defensivas globais fortes.*

Na Tabela 1 (OUAZINE; SLIMANI; TARI, 2017) apresentamos alguns valores obtidos sobre algumas classes de grafos (conexos), onde G representa os grafos simples, K_n grafos *completos* de ordem n, T as *árvores* e $K_{r,s}$ grafos *bipartidos completos*.

G	K_n	T	$K_{r,s}$
$a^d_k \leq \lceil (n+k+1)/2 \rceil$	$a^d_k = \lceil (n+k+1)/2 \rceil$		
$a^d_{-1} \leq min\{n - \lceil \delta/2 \rceil, \lceil n/2 \rceil\}$	$a^d_{-1} = \lceil n/2 \rceil$	$a^d_{-1} = 1$	$a^d_{-1} = \lfloor r/2 \rfloor + \lfloor s/2 \rfloor$
$a^d_0 \leq min\{n - \lfloor \delta/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor + 1\}$	$a^d_0 = \lfloor n/2 \rfloor + 1$	$a^d_0 \leq n$	$a^d_0 = \lceil r/2 \rceil + \lceil s/2 \rceil$
$\gamma^d_k \leq \gamma^d_{k-2r} + r$	$\gamma^d_k = \lfloor (n+k+1)/2 \rfloor$	$\gamma^d_k \leq \lfloor n + 2/3 - k \rfloor$	
$A^d_k \leq \lceil (2n - \delta + k)/2 \rceil$	$A^d_k = \lceil (n+k+1)/2 \rceil$		$A^d_k = \lceil (r+k)/2 \rceil + \lceil (s+k)/2 \rceil$

Tabela 1: Números de k-Alianças Defensivas

Para ver resultados sobre outras classes de grafos, como *bipartidos*, *planares*, grafos *regulares* e grafos *ciclos* existem artigos de "survey" com a maioria dos resultados obtidos desde 2002. Os mais recentes são os de 2013 (YERO; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, 2013), de 2014 (FERNAU; RODRIGUEZ-VELAZQUEZ, 2014) e um mais recente de 2017 (OUAZINE; SLIMANI; TARI, 2017).

3.2 Alianças Ofensivas

Uma aliança ofensiva é um conjunto de vértices em que, cada vértice em sua fronteira tenha (pelo menos) tantos vizinhos dentro quanto fora da aliança, incluindo ele próprio.

Definição 3.11 *Uma aliança ofensiva é um conjunto não vazio de vértices $S \subseteq V$ quando, $\forall v \in \partial(S)$, $|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap \bar{S}|$. Implicando que para todo vértice $v \in \partial(S)$, v tem mais vizinhos em S que em $V - S$.*

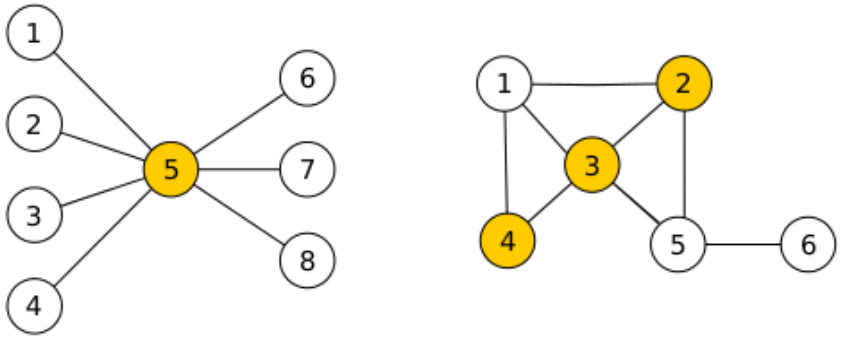

Figura 4: Exemplos de Alianças Ofensivas

Na figura 4 é evidente que os vértices (brancos) que estão na fronteira da aliança ofensiva S (vértices amarelos), possuem mais vértices adjacentes a S do que a $\bar{S}$. Assim, podemos dizer que todo vértice em $\partial(S)$ é *vulnerável* a um possível ataque pelos vértices de S. Quando um ataque por vértices de S nos vértices de $\partial(S)$, resulta em pelo menos um empate para S, dizemos que S pode *efetivamente atacar* os vértices em $\partial(S)$.

Devemos observar que as alianças em grafos não se preocupam com a representação das consequências de um ataque dos vértices de S em $\partial(S)$ e vice-versa.

Definição 3.12 *Uma aliança ofensiva S é chamada de forte quando, $\forall v \in \partial(S)$, $|N[v] \cap S| > |N(v) \cap \bar{S}|$. Assim, a inequação é estrita e todo vértice em $\partial(S)$ é fortemente vulnerável.*

Definição 3.13 *Uma aliança ofensiva (forte) S é chamada crítica se nenhum subconjunto próprio de S também é uma aliança ofensiva (forte).*

Definição 3.14 *Uma aliança ofensiva (forte) S é chamada global se também for um conjunto dominante.*

As alianças ofensivas e ofensivas fortes, definidas por Favaron (FAVARON et al., 2004) são equivalentes às 1-alianças ofensivas e 2-alianças ofensivas (FERNAU; RODRÍGUEZ; SIGARRETA, 2009).

Definição 3.15 *Uma k-aliança ofensiva é um conjunto não vazio* $S \subseteq V$ *quando,* $\forall v \in \partial(S)$ *e* $k \in \{2 - \Delta(G), ..., \Delta(G)\}$, $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k$.

Partindo das **Definições 3.6 e 3.7** e das definições em (OUAZINE; SLIMANI; TARI, 2017) temos que as alianças ofensivas também podem ser definidas por meio dos graus dos vértices.

Definição 3.16 *Um conjunto* S *é aliança ofensiva quando* $\forall v \in \partial(S)$ $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + 1$.

Definição 3.17 *Um conjunto* S *é aliança ofensiva forte quando* $\forall v \in \partial(S)$ $\deg_S(v) > \deg_{\bar{S}}(v) + 1$.

- A equivalência entre 1-aliança ofensiva e aliança ofensiva, é mostrada a seguir:

  Seja $S \subseteq V$ uma aliança ofensiva. Queremos que $\forall v \in \partial(S)$ e $k = 1$,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow |N(v) \cap S| \geq |N[v] \cap \bar{S}|$

  Pela **Definição 3.16** temos,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow \deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + 1$

  Como $k = 1$ temos,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + 1 \Leftrightarrow \deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + 1$

  Concluímos que as duas equações são equivalentes.

- A equivalência entre 2-aliança ofensiva e aliança ofensiva forte, é mostrada a seguir:

  Seja $S \subseteq V$ uma aliança ofensiva forte. Queremos que $\forall v \in \partial(S)$ e $k = 2$,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow |N(v) \cap S| > |N[v] \cap \bar{S}|$

  Pela **Definição 3.17** temos,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow \deg_S(v) > \deg_{\bar{S}}(v) + 1$

  Como $k = 2$ temos,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + 2 \Leftrightarrow \deg_S(v) > \deg_{\bar{S}}(v) + 1$

  Como os graus dos vértices são números inteiros,

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + 2 \Leftrightarrow \deg_S(v) \geq (\deg_{\bar{S}}(v) + 1) + 1$

  $\deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + 2 \Leftrightarrow \deg_S(v) \geq \deg_{\bar{S}}(v) + 2$

Concluímos que as equações são equivalentes.

3.2.1 Alianças Ofensivas em algumas classes de grafos

Vários parâmetros foram definidos e estudados na literatura para alianças ofensivas e k-alianças ofensivas. Partindo dessa generalização de alianças ofensivas em k-alianças ofensivas, vamos mostrar a definição de alguns desses parâmetros e valores obtidos em algumas classes de grafos.

Definição 3.18 *O número de k-aliança ofensiva de um grafo G é igual à cardinalidade mínima dentre todas as críticas k-alianças ofensivas em G e é denotado $a_k^o(G)$. Equivalentemente $a_1^o(G)$ para alianças ofensivas e $a_2^o(G)$ para alianças ofensivas fortes.*

Definição 3.19 *O número da k-aliança ofensiva superior de um grafo G é igual à cardinalidade máxima dentre todas as críticas k-alianças ofensivas em G e é denotado $A_k^o(G)$. Equivalentemente $A_1^o(G)$ para alianças ofensivas e $A_2^o(G)$ para alianças ofensivas fortes.*

Definição 3.20 *O número de k-aliança ofensiva global de um grafo G é igual à cardinalidade mínima dentre todas as críticas k-alianças ofensivas globais em G e é denotado $\gamma_k^o(G)$. Equivalentemente $\gamma_1^o(G)$ para alianças ofensivas globais e $\gamma_2^o(G)$ para alianças defensivas globais fortes.*

Algumas relações observadas sobre k-alianças ofensivas são apresentadas a seguir:

- $a_1^o(G) \leq a_2^o(G) \leq A_2^o(G)$ [(KRISTIANSEN; HEDETNIEMI; HEDETNIEMI, 2004), (HASSAN-SHAFIQUE, 2004)];
- $a_1^o(G) \leq A_1^o(G)$ [(KRISTIANSEN; HEDETNIEMI; HEDETNIEMI, 2004), (HASSAN-SHAFIQUE, 2004)];
- $a_1^o(G) \leq \gamma_1^o(G)$ [(RODRíGUEZ-VELáZQUEZ; SIGARRETA, 2006)];
- $a_2^o(G) \leq \gamma_2^o(G)$ [(RODRíGUEZ-VELáZQUEZ; SIGARRETA, 2006)];
- $a_k^o(G) \leq a_{k+1}^o(G)$ [(FERNAU; RODRÍGUEZ; SIGARRETA, 2009)];
- $a_k^o(G) \leq \gamma_k^o(G)$ [(FERNAU; RODRÍGUEZ; SIGARRETA, 2009), (ALMIRA; MARÍA, 2007), (YERO, 2010)];
- $\gamma(G) \leq \gamma_1^o(G) \leq \gamma_2^o(G)$ [(FAVARON, 2008)];

- $\gamma(G) \leq \gamma_k^o(G) \leq \gamma_{k+1}^o(G)$ [(FERNAU; RODRÍGUEZ; SIGARRETA, 2009), (ALMIRA; MARÍA, 2007), (YERO, 2010)];

Em (OUAZINE; SLIMANI; TARI, 2017), Ouazine, Slimani e Tariobter mostram valores de $a_k^o(G)$, $a_1^o(G)$, $a_2^o(G)$, $A_k^o(G)$, $A_1^o(G)$, $A_2^o(G)$, $\gamma_k^o(G)$, $\gamma_1^o(G)$ e $\gamma_2^o(G)$ para várias classes de grafos, como por exemplo: *bipartidos*, *bipartidos completos*, *planares*, *regulares*, *grafos caminho*, *grafos linha* e *árvores*. É possível ver que muitos parâmetros ainda não foram calculados, principalmente para grafos linhas e bipartidos.

3.3 Alianças Poderosas

Podemos encontrar informações sobre outros tipos de alianças em grafos, além das defensivas e ofensivas. Algumas linhas de pesquisas estudam as chamadas *alianças poderosas (ou duais)* (BRIGHAM et al., 2009). Tais alianças apresentam a característica de serem defensivas e ofensivas ao mesmo tempo. Com isso, uma *aliança poderosa*, apresenta a propriedade de ser defensiva pois pode defender os vértices de possíveis ataques vindos dos vértices da fronteira, e também, a propriedade ofensiva, pois consegue atacar efetivamente todos os vértices pertencentes a fronteira.

Definição 3.21 *Uma aliança poderosa é um conjunto não vazio de vértices* $S \subseteq V$ *quando,* $\forall v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap \bar{S}|$. *Implicando que para todo vértice* $v \in S$, v *tem aliados suficientes para o defender de um ataque partindo de* $\partial(S)$ *e também consegue atacar efetivamente qualquer vértice pertencente a* $\partial(S)$.

Da mesma maneira que as defensivas e ofensivas, as alianças poderosas podem apresentar as características das alianças *fortes*, *críticas* e *globais*.

Em (OUAZINE; SLIMANI; TARI, 2017), Ouazine, Slimani e Tariobter mostram os limites, teoremas e os números de alianças poderosas em diversas classes de grafos, obtidas ao longo desses 15 anos, desde que se iniciou a pesquisa sobre o tema. Nesse artigo, encontramos resultados em grafos *bipartidos*, *bipartidos completos*, *planares*, *regulares*, *grafos caminho*, *grafos linha* e *árvores*.

3.4 Alianças Ponderadas

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, $w : V \to \mathbb{N}$ uma função que pondera os **vértices** de V com um número inteiro positivo e $w(v)$ o peso atribuído a v por w. Com isso, obtemos alguns tipos adicionais de alianças (JAMIESON, 2007).

Definição 3.22 *Uma aliança defensiva ponderada é um conjunto não vazio de vértices $S \subseteq V$ quando, $\forall v \in S$, $\sum_{x \in N[v] \cap S} w(x) \geq \sum_{y \in N(v) \cap \bar{S}} w(y)$.*

Definição 3.23 *Uma aliança ofensiva ponderada é um conjunto não vazio de vértices $S \subseteq V$ quando, $\forall v \in \partial(S)$, $\sum_{x \in N(v) \cap S} w(x) \geq \sum_{y \in N[v] \cap \bar{S}} w(y)$.*

Definição 3.24 *Uma aliança poderosa ponderada é um conjunto não vazio de vértices $S \subseteq V$ quando, $\forall v \in N[S]$, $\sum_{x \in N[v] \cap S} w(x) \geq \sum_{y \in N[v] \cap \bar{S}} w(y)$.*

Alianças (defensivas, ofensivas e poderosas) podem ser facilmente generalizadas para as *alianças ponderadas*. Basta ter uma aliança $S \subseteq V$ e uma função $w : V \to \{1\}$. Com isso, todo vértice $v \in S$ tem peso 1 e a soma dos pesos dos vértices de S será equivalente a cardinalidade de S.

Da mesma maneira que as alianças defensivas, ofensivas e poderosas, as *alianças ponderadas* podem apresentar as características de serem *fortes*, *críticas* e *globais*.

Observe que todas essas alianças podem ser facilmente generalizadas para grafos com pesos nas arestas e/ou nos vértices. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e as funções $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : V \to \mathbb{R}$ que ponderam as arestas de E e os vértices de V. Daí, obtemos as chamadas (f, g)-*alianças*, apresentadas pela primeira vez por Shafique em (HASSAN-SHAFIQUE, 2004) e estudadas em (ROOHITAVAF; KULKARNI, 2016).

As alianças definidas anteriormente neste trabalho, podem ser facilmente generalizadas para as (f, g)-alianças. Para os casos de grafos sem pesos, tanto nas arestas quanto nos vértices, assumimos que as funções f e g sempre resultam no valor 1.

Definição 3.25 *Uma (f,g)-aliança defensiva é um conjunto não vazio de vértices $S \subseteq V$ quando, $\forall v \in S$, $\sum_{x \in N[v] \cap S} f(x, v)g(x) \geq \sum_{y \in N(v) \cap \bar{S}} f(y, v)g(y)$.*

Definição 3.26 *Uma (f,g)-aliança ofensivas é um conjunto não vazio de vértices $S \subseteq V$ quando, $\forall v \in \partial(S)$, $\sum_{x \in N(v) \cap S} f(x, v)g(x) \geq \sum_{y \in N[v] \cap \bar{S}} f(y, v)g(y)$.*

Definição 3.27 *Uma (f,g)-aliança poderosa é um conjunto não vazio de vértices $S \subseteq V$ quando, $\forall v \in N[S]$, $\sum_{x \in N[v] \cap S} f(x, v)g(x) \geq \sum_{y \in N[v] \cap \bar{S}} f(y, v)g(y)$.*

4 Complexidade Computacional

A Complexidade Computacional estabelece limites (inferior e superior) no número de passos necessários para resolver um problema computacional por meio de algoritmos. Também identifica problemas computacionais potencialmente difíceis e traços comuns entre esses problemas.

Podemos moldar problemas computacionais no formato de uma *instância*, que representa o conjunto de dados, e uma *pergunta*, que representa o objetivo a ser alcançado. A *instância* inclui todos os dados necessários para sua formulação e compreensão, enquanto a *pergunta* caracteriza o problema para o qual deve-se fornecer uma resposta.

Existem classes gerais nas quais os problemas computacionais podem estar inseridos. Falaremos sobre a classe dos problemas de *decisão* e de *otimização*.

Problemas de decisão são aqueles que exigem uma resposta binária para sua pergunta, isto é, a resposta é simplesmente ”sim” ou ”não”. E um problema de otimização é aquele que possui como objetivo a satisfação de determinados critérios de otimização.

Em geral, existe um relacionamento entre as classes de problemas, sendo que um problema de decisão não será mais difícil do que o seu equivalente no formato de problema de otimização. Assim, é simples reformular um problema de otimização como um problema equivalente de decisão, não mais difícil que o primeiro.

Para melhor entendimento, dividimos os problemas computacionais nas classes: **P**, **NP**, **NP-completo** e **NP-difícil**. A Figura 5 ilustra o relacionamento entre essas classes e também é chamada de *Diagrama de Euler para o conjunto de problemas P, NP, NP-completo e NP-difícil*.

Uma maneira de medirmos a eficiência de um algoritmo é através da complexidade. Assim, dado um problema computacional X, se houver um algoritmo que resolve X em tempo polinomial, então X pertence a classe **P**. Segundo Szwarcfiter (SZWARCFITER, 1988), ”um algoritmo é eficiente precisamente quando a sua complexidade for um polinômio no tamanho de sua entrada”.

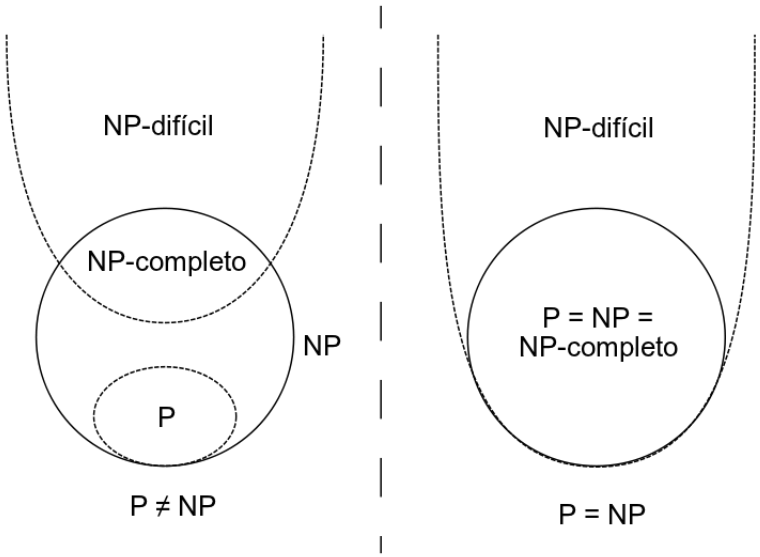

Figura 5: Classes de complexidade computacional

4.1 Complexidade de Alianças

Nesta seção definimos alguns problemas computacionais sobre alianças em grafos e mostramos, na Tabela 2, a quais classes de complexidade esses problemas pertencem.

- **AD**

  INSTÂNCIA: grafo simples $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

  PERGUNTA: existe aliança defensiva $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

- **ADG**

  INSTÂNCIA: grafo simples $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

  PERGUNTA: existe aliança defensiva global $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

- **AD-P**

  INSTÂNCIA: grafo com pesos nos vértices $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

  PERGUNTA: existe aliança defensiva ponderada $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

- **ADG-P**

  INSTÂNCIA: grafo com pesos nos vértices $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

  PERGUNTA: existe aliança defensiva global ponderada $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

- **AO**

INSTÂNCIA: grafo simples $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

PERGUNTA: existe aliança ofensiva $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

- **AOG**

  INSTÂNCIA: grafo simples $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

  PERGUNTA: existe aliança ofensiva global $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

- **AO-P**

  INSTÂNCIA: grafo com pesos nos vértices $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

  PERGUNTA: existe aliança ofensiva ponderada $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

- **AOG-P**

  INSTÂNCIA: grafo com pesos nos vértices $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

  PERGUNTA: existe aliança ofensiva global ponderada $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

- **AP**

  INSTÂNCIA: grafo simples $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

  PERGUNTA: existe aliança poderosa $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

- **APG**

  INSTÂNCIA: grafo simples $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

  PERGUNTA: existe aliança poderosa global $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

- **AP-P**

  INSTÂNCIA: grafo com pesos nos vértices $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

  PERGUNTA: existe aliança poderosa ponderada $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

- **APG-P**

  INSTÂNCIA: grafo com pesos nos vértices $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

  PERGUNTA: existe aliança poderosa global ponderada $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq k$?

Ainda não sabemos se existe, e quais são, os tipos de grafos que fazem o problema de decisão **AOG-P** ser **NP-completo**. Porém, vamos mostrar a seguir que esse problema pertence a classe de problemas **P** se for restrito a grafos estrela. Para efeitos de comparação, podemos ver em (JAMIESON, 2007) que os problemas **ADG-P** e **APG-P** são, diferentemente de **AOG-P**, **NP-completo** para grafos estrela.

Teorema 1 *O problema de decisão* **AOG-P** *pertence a classe de problemas* **P** *se for restrito a grafos estrela.*

Prova. Seja $G = (V, E)$ um grafo estrela. Assim, G é uma *árvore* com $|V| - 1$ folhas e um único vértice central c vizinho de todas as folhas, isto é $N(c) = V - \{c\}$. Queremos que $S \subseteq V$ seja aliança ofensiva global ponderada de tamanho $k \leq |V|$. Assim, há três maneiras de construir a aliança S de tamanho k.

Primeiramente há o caso em que $k = |V|$. Daí $\partial(S)$ será um conjunto vazio e teremos sempre a mesma resposta para o problema.

Se $k < |V| - 1$ é preciso que $c \in S$, para que S seja global. Caso contrário, teríamos k folhas em S e $|V| - k$ folhas não cobertas, pois toda folha é vizinha, somente e obrigatoriamente, de c. Assim, inserimos em S o vértice c, para que S seja global, e as $k-1$ **folhas com maiores pesos**, afim de maximizar o peso de S e obtermos $|S| = k$. Em seguida, verificamos se $\forall v \in \partial(S)$, $\sum_{x \in N(v) \cap S} w(x) \geq \sum_{y \in N[v] \cap \bar{S}} w(y)$. Caso seja verdade, temos uma resposta positiva para o problema, pois S será global e a maior (com relação a pesos) aliança ofensiva ponderada possível de se formar com $k < |V| - 1$ vértices. Se S não atender aos requisitos descritos anteriormente, teremos uma resposta negativa para o problema.

O terceiro caso é quando $k = |V| - 1$. Com isso, temos que qualquer conjunto de k vértices será dominante. Assim inserimos em S os $k-1$ vértices folhas com maiores pesos. Agora, podemos inserir em S o vértice central c ou a folha restante com menor peso. Podemos tentar os dois casos e verificar se algum deles gera uma aliança ofensiva global ponderada. Caso sim, temos uma resposta positiva para o problema e em caso contrário teremos um "não".

Claramente teremos um custo de tempo polinomial para escolher e construir uma aliança ofensiva global ponderada, com k vértices, se seguirmos os casos descritos anteriormente.

Problema Computacional	Classe de Complexidade	Prova
AD	**NP-completo**	(JAMIESON; HEDETNIEMI; MCRAE, 2009)
AO	**NP-completo**	(FERNAU; RAIBLE, 2007)
AP	**NP-completo**	(HASSAN-SHAFIQUE, 2004)
ADG	**NP-completo**	(CAMI et al., 2006)
AOG	**NP-completo**	(CAMI et al., 2006)
APG	**NP-completo**	(CAMI et al., 2006)
AD-P	**NP-completo**	(JAMIESON, 2007)
AO-P	**NP-completo**	(JAMIESON, 2007)
AP-P	**NP-completo**	(JAMIESON, 2007)
ADG-P	**NP-completo**	(JAMIESON, 2007)
AOG-P	**P** (para grafos estrela)	Pelo **Teorema 1**
APG-P	**NP-completo**	(JAMIESON, 2007)

Tabela 2: Classes de complexidade das Alianças

Conclusão

O estudo de alianças em grafos, com suas variações de tipos e modelos, se mostrou interessante no decorrer dos últimos anos, devido ao vasto campo de aplicação de tais estruturas, principalmente para modelagem de sistemas distribuídos e redes sociais.

Neste trabalho levantamos as informações mais recentes e importantes sobre o assunto, além de demonstrar detalhes, de resultados previamente obtidos, que foram implícitos na literatura.

Mesmo sendo um modelo recente, várias pesquisas matemática e teórica sobre alianças foram realizadas. Porém, pode-se perceber que ainda falta obter valores para os número de alianças em diversas classes de grafos, como bipartidos e caminhos. Além disso, poucos algoritmos sobre tais estruturas foram encontrados, sendo a maioria sobre grafos do tipo árvores ou caminhos, baseados em programação dinâmica (PD).

Para trabalhos futuros podemos calcular os números de alianças para os grafos ponderados, pois para estes, os resultados obtidos até a presente data, são apenas sobre complexidade computacional. E também descobrir para quais classes de grafos o problema **AOG-P** se torna **NP-completo**.

A pouco tempo iniciaram-se os estudos sobre a unificação de toda a teoria de alianças para as chamadas *(f,g)-alianças*. Partindo dessa ideia, o objetivo desses estudos é obter algoritmos e propriedades matemáticas mais genéricas e que envolvam problemas maiores.

Outro fato interessante é que, o início dos estudos sobre alianças foi em 1979 porém pouca coisa foi feita na época e a abordagem sobre tais estruturas era a de destruição de alianças. Partindo dessa abordagem mais antiga e mesclando com a mais recente, apresentada nesse trabalho, podemos obter uma modelagem mais dinâmica sobre alianças em grafos. Com o objetivo de encontrar e manter tais estruturas no grafo, dependendo do que aconteça à estrutura do grafo. Existem linhas de pesquisa que já estudam problemas nesse formato, mas com a abordagem de alianças podemos generalizar tais estudos. Assim como foi apresentado nos exemplos de onde podemos utilizar alianças em grafos. Um desses estudos é conhecido como Segurança Eterna em Grafos.

Referências

ALMIRA, S.; MARÍA, J. Alianzas en grafos. 2007. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

BRIGHAM, R. C. et al. Powerful alliances in graphs. *Discrete Mathematics*, v. 309, n. 8, p. 2140 – 2147, 2009. ISSN 0012-365X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com-/science/article/pii/S0012365X0800263X>. Citado na página 20.

BRIGHAM, R. C.; DUTTON, R. D.; HEDETNIEMI, S. T. Security in graphs. *Discrete applied mathematics*, Elsevier, v. 155, n. 13, p. 1708–1714, 2007. Citado na página 12.

CAMI, A. et al. On the complexity of finding optimal global alliances. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, CHARLES BABBAGE RESEARCH CENTRE, v. 58, p. 23, 2006. Citado na página 26.

CARRIER, F. et al. Self-stabilizing (f,g)-alliances with safe convergence. In: _____. *Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems: 15th International Symposium, SSS 2013, Osaka, Japan, November 13-16, 2013. Proceedings*. Cham: Springer International Publishing, 2013. p. 61–73. ISBN 978-3-319-03089-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-03089-0_5>. Citado na página 8.

FAVARON, O. Global alliances and independent domination in some classes of graphs. *the electronic journal of combinatorics*, v. 15, n. 1, p. R123, 2008. Citado na página 18.

FAVARON, O. et al. Offensive alliances in graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, De Gruyter Open, v. 24, n. 2, p. 263–275, 2004. Citado na página 17.

FERNAU, H.; RAIBLE, D. Alliances in graphs: a complexity-theoretic study. In: *SOFSEM (2)*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 61–70. Citado na página 26.

FERNAU, H.; RODRÍGUEZ, J. A.; SIGARRETA, J. M. Offensive r-alliances in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 157, n. 1, p. 177–182, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 19.

FERNAU, H.; RODRIGUEZ-VELAZQUEZ, J. A. A survey on alliances and related parameters in graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA)*, v. 2, n. 1, p. 70–86, 2014. Citado na página 15.

FLAKE, G. W.; LAWRENCE, S.; GILES, C. L. Efficient identification of web communities. In: ACM. *Proceedings of the sixth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. [S.l.], 2000. p. 150–160. Citado na página 8.

FLOCCHINI, P. et al. Dynamic monopolies in tori. *Discrete Applied Mathematics*, v. 137, n. 2, p. 197 – 212, 2004. ISSN 0166-218X. Disponível em: <http://www-.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X03002610>. Citado na página 8.

HASSAN-SHAFIQUE, K. Partitioning a graph in alliances and its application to data clustering. 2004. Citado 5 vezes nas páginas 9, 13, 18, 21 e 26.

HAYNES, T. et al. A quantitative analysis of secondary rna structure using domination based parameters on trees. *BMC bioinformatics*, BioMed Central, v. 7, n. 1, p. 108, 2006. Citado na página 8.

HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S.; SLATER, P. Domination in graphs: advanced topics. Marcel Dekker, 1997. Citado na página 11.

HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S.; SLATER, P. *Fundamentals of domination in graphs*. [S.l.]: CRC Press, 1998. Citado na página 11.

JAMIESON, L. H. *Algorithms and complexity for alliances and weighted alliances of various types*. Tese (Doutorado) — Clemson University, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 21, 24 e 26.

JAMIESON, L. H.; HEDETNIEMI, S. T.; MCRAE, A. A. The algorithmic complexity of alliances in graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput*, v. 68, p. 137–150, 2009. Citado na página 26.

KRISTIANSEN, P.; HEDETNIEMI, S. M.; HEDETNIEMI, S. T. Introduction to alliances in graphs. In: *17th International Symposium of Computer Information Science*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 308–312. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 7.

KRISTIANSEN, P.; HEDETNIEMI, S. M.; HEDETNIEMI, S. T. Alliances in graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, CHARLES BABBAGE RESEARCH CENTRE, v. 48, p. 157–178, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 8, 13 e 18.

LIPMAN, M.; RINGEISEN, R. Cohesion in alliance graphs. *Congr. Numer*, v. 24, p. 713–720, 1979. Citado na página 7.

OUAZINE, K.; SLIMANI, H.; TARI, A. Alliances in graphs: Parameters, properties and applications—a survey. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, Elsevier, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 14, 15, 17, 19 e 20.

PELEG, D. Local majorities, coalitions and monopolies in graphs: a review. *Theoretical Computer Science*, v. 282, n. 2, p. 231 – 257, 2002. ISSN 0304-3975. FUN with Algorithms. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii-/S030439750100055X>. Citado na página 8.

PERIANES-RODRÍGUEZ, A.; OLMEDA-GÓMEZ, C.; MOYA-ANEGÓN, F. Detecting, identifying and visualizing research groups in co-authorship networks. *Scientometrics*, Springer, v. 82, n. 2, p. 307–319, 2010. Citado na página 8.

RODRíGUEZ-VELáZQUEZ, J.; SIGARRETA, J. Global offensive alliances in graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 25, n. Supplement C, p. 157 – 164, 2006. ISSN 1571-0653. CTW2006 - Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii-/S1571065306000898>. Citado na página 18.

ROOHITAVAF, M.; KULKARNI, S. Stabilization and fault-tolerance in presence of unchangeable environment actions. In: ACM. *Proceedings of the 17th International Conference on Distributed Computing and Networking*. [S.l.], 2016. p. 19. Citado na página 21.

SHAFIQUE, K. H.; DUTTON, R. D. On satisfactory partitioning of graphs. *Congressus Numerantium*, Winnipeg; Utilitas Mathematica; 1998, p. 183–194, 2002. Citado na página 13.

SRIMANI, P. K.; XU, Z. Distributed protocols for defensive and offensive alliances in network graphs using self-stabilization. In: IEEE. *Computing: Theory and Applications, 2007. ICCTA'07. International Conference on*. [S.l.], 2007. p. 27–31. Citado na página 8.

SZABÓ, G.; CZÁRÁN, T. Defensive alliances in spatial models of cyclical population interactions. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 4, p. 042902, 2001. Citado na página 8.

SZWARCFITER, J. L. *Grafos e algoritimos computacionais*. [S.l.]: Campus, 1988. Citado na página 22.

XU, Z.; SRIMANI, P. K. Self-stabilizing distributed algorithms for graph alliances. In: *Proceedings 20th IEEE International Parallel Distributed Processing Symposium*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 6 pp.–. ISSN 1530-2075. Citado na página 8.

YAHIAOUI, S. et al. Self-stabilizing algorithms for minimal global powerful alliance sets in graphs. *Information Processing Letters*, v. 113, n. 10, p. 365 – 370, 2013. ISSN 0020-0190. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020019013000720>. Citado na página 8.

YERO, I. G. Contribution to the study of alliances in graphs. 12 2010. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

YERO, I. G.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A. Defensive alliances in graphs: a survey. *arXiv preprint arXiv:1308.2096*, 2013. Citado na página 15.